Quelle forme donner à un stade pour battre de nouveaux records au 200m ?

Amandine Aftalion

Emmanuel Trélat

Le contexte

Usain Bolt, 2009 :
200m en 19.19s
non battu depuis.

Florence Griffith Joyner, 1988 :
200m en 21.34s
non battu depuis.

Limites humaines ?

Pourrait-on améliorer les records avec une piste plus propice ?

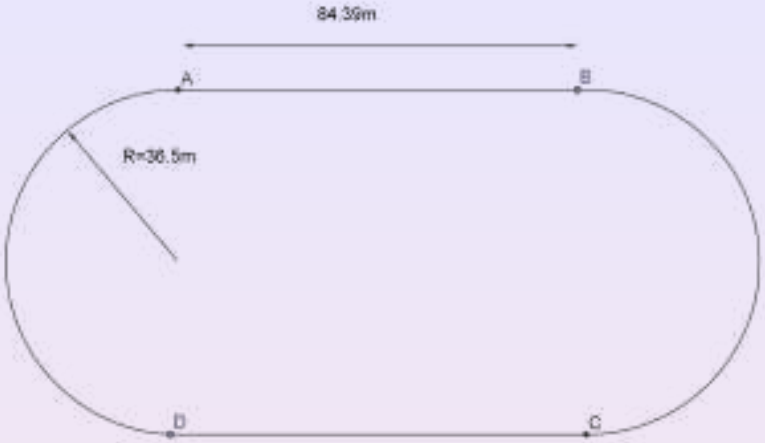
(ligne droite... mais...)

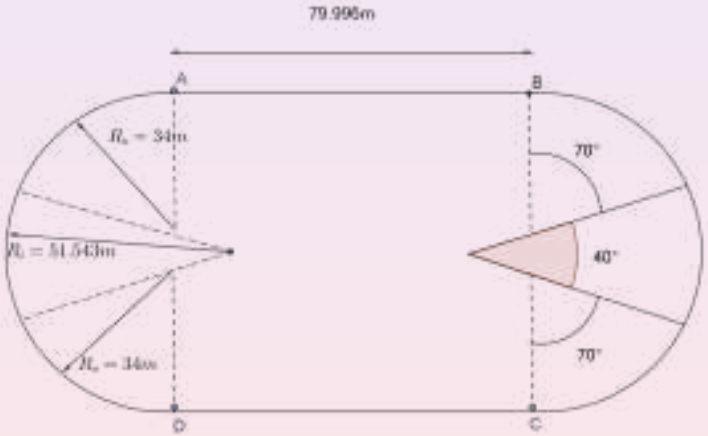
Stades actuels (certifiés par l'IAAF)

Stade standard :

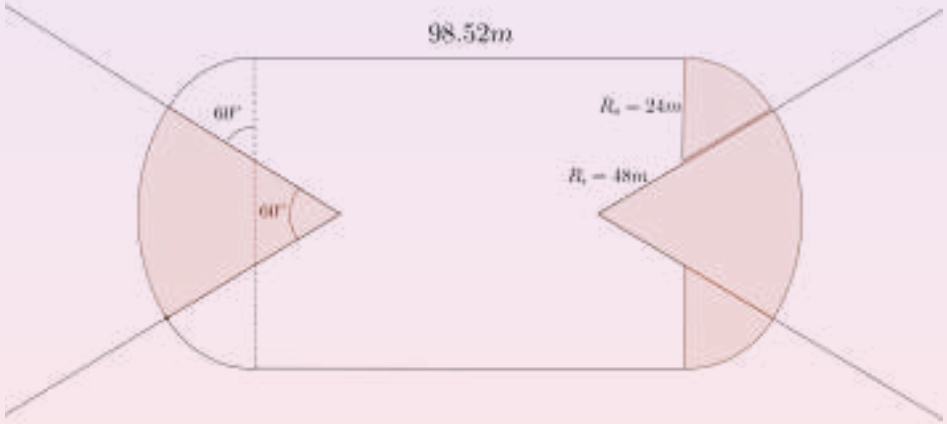
pourquoi 84.39 ? $\rightarrow$ on va voir qu'on fait

mieux avec un segment plus court ! (61)





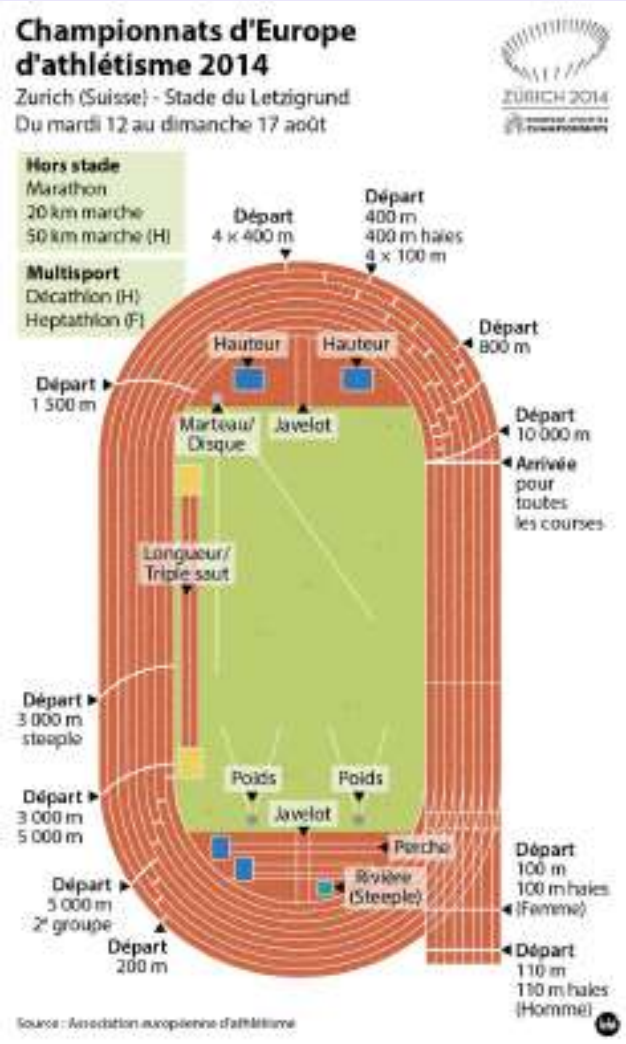
Double Bend 1



Double Bend 2

(longueur totale de la piste = 400m)

Différence entre les lignes



Lignes 1 et 9 moins favorables :

- effets de la force centrifuge,

- effets d'interaction

($\rightarrow$ à inclure dans le modèle)

Objectifs

Construire un stade optimal :

- permettant de battre les records actuels ;
- réduisant les écarts entre les lignes ;
- contenant (éventuellement) des stades de football et de rugby.

Méthodologie :

- Optimisation du stade : problème de type Dubins.
- Modèle de coureur, contrôle optimal.

A la recherche du stade optimal

Piste = courbe fermée dans le plan, de longueur donnée d.
$(d = 400m)$

Hypothèse : le coureur utilise sa force propulsive pour avancer et pour combattre la force centrifuge.

But : minimiser le maximum de courbure le long de la piste.

$$\boxed{\min \max \frac{1}{R}}$$

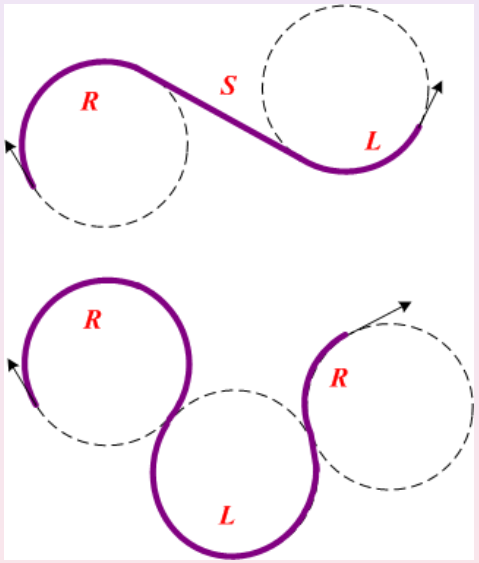
R : rayon de courbure en un point donné de la piste.

A la recherche du stade optimal

Ce problème est lié au problème de Dubins. De manière générale :

Théorème

Etant donnés deux points A et B dans le plan, la courbe de longueur d, reliant A à B, minimisant le maximum de courbure, est une concaténation d'arcs de cercle et de segments.



A la recherche du stade optimal

Piste = courbe fermée dans le plan, de longueur donnée d.
$(d = 400m)$

$$\boxed{\min \max \frac{1}{R}}$$

La piste optimale est un cercle.

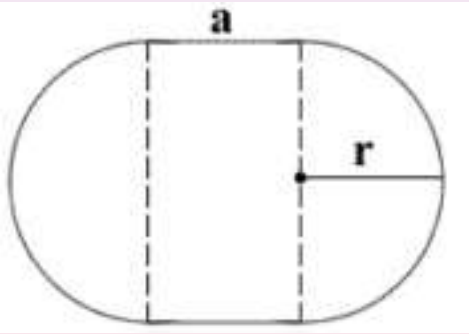
(ne contient pas les stades de football et de rugby)

A la recherche du stade optimal

Ajout d'une contrainte : on impose, dans la courbe fermée, un segment de longueur donnée a.

$$\boxed{\min \max \frac{1}{R}}$$

Alors le stade optimal est de type standard.



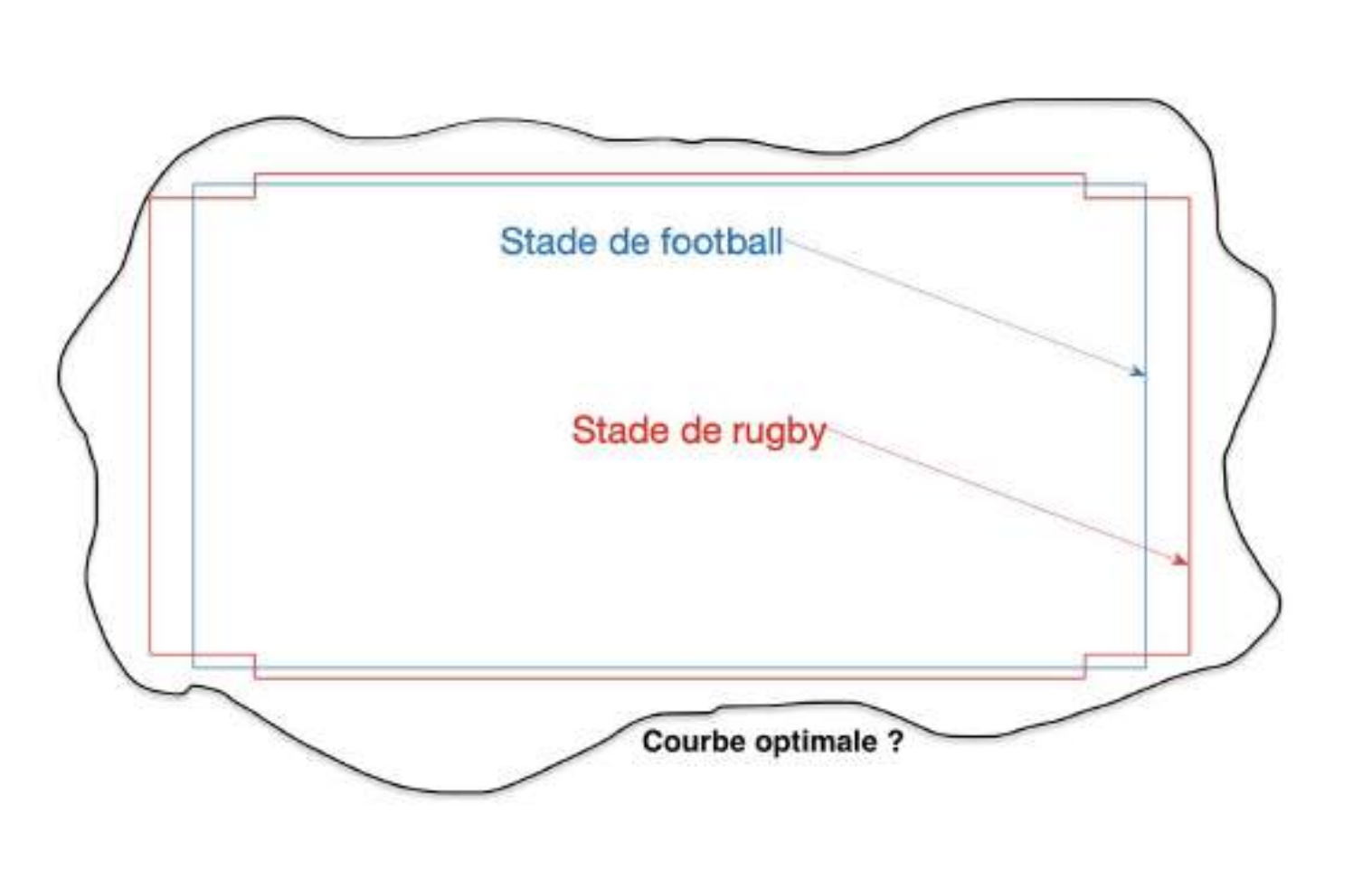
Mais nous allons voir que la performance du coureur est inversement proportionnelle à a !

En particulier, le stade standard ($a = 84.39m$) n'est pas optimal : a est trop grand.

A la recherche du stade optimal

<u>Problème contraint</u> : trouver une courbe plane, fermée, contenant les stades de football et de rugby, et minimisant le maximum de courbure :

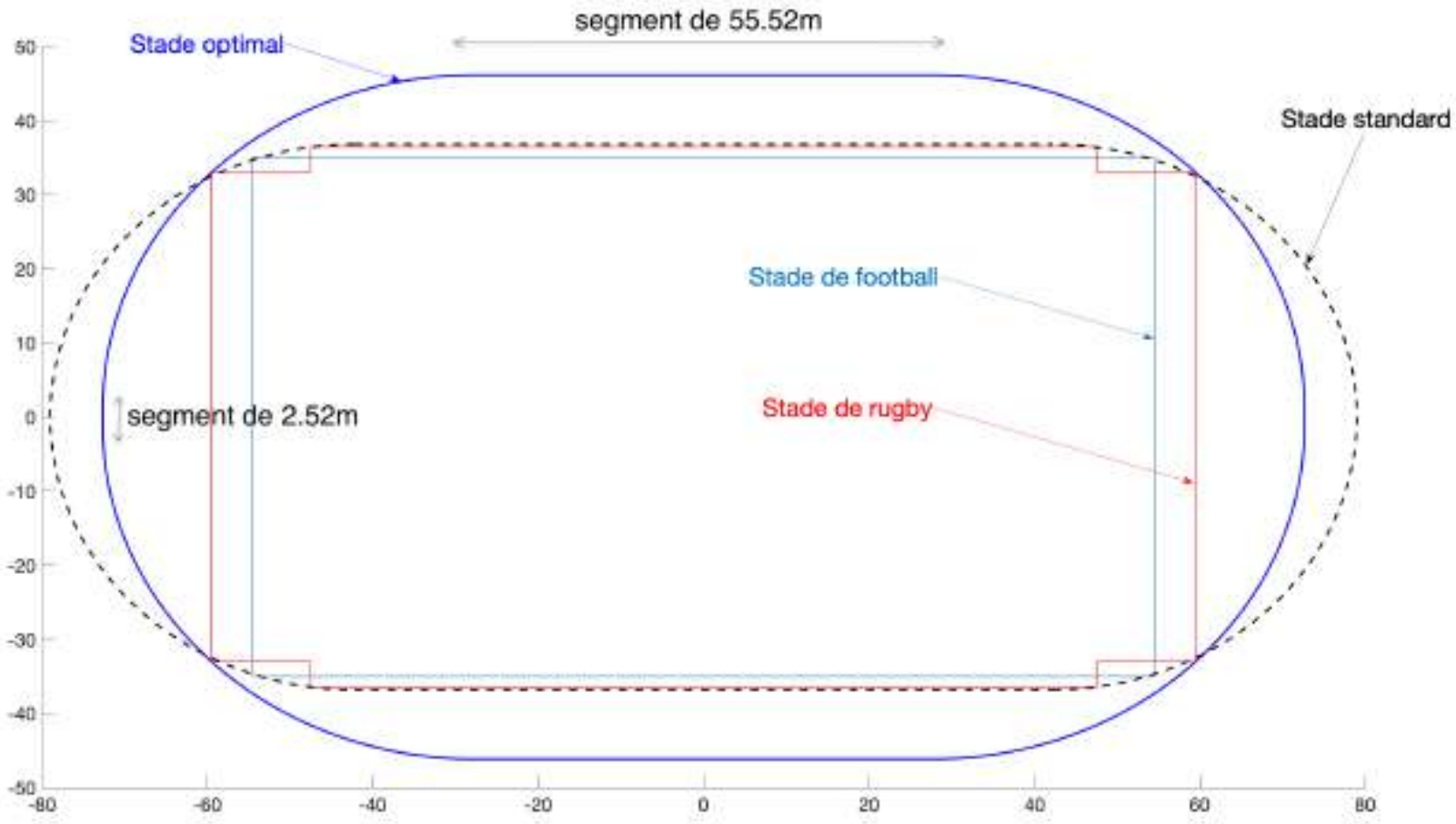
$$\boxed{\min \max \frac{1}{R}}$$



A la recherche du stade optimal

Problème contraint : trouver une courbe plane, fermée, contenant les stades de football et de rugby, et minimisant le maximum de courbure :

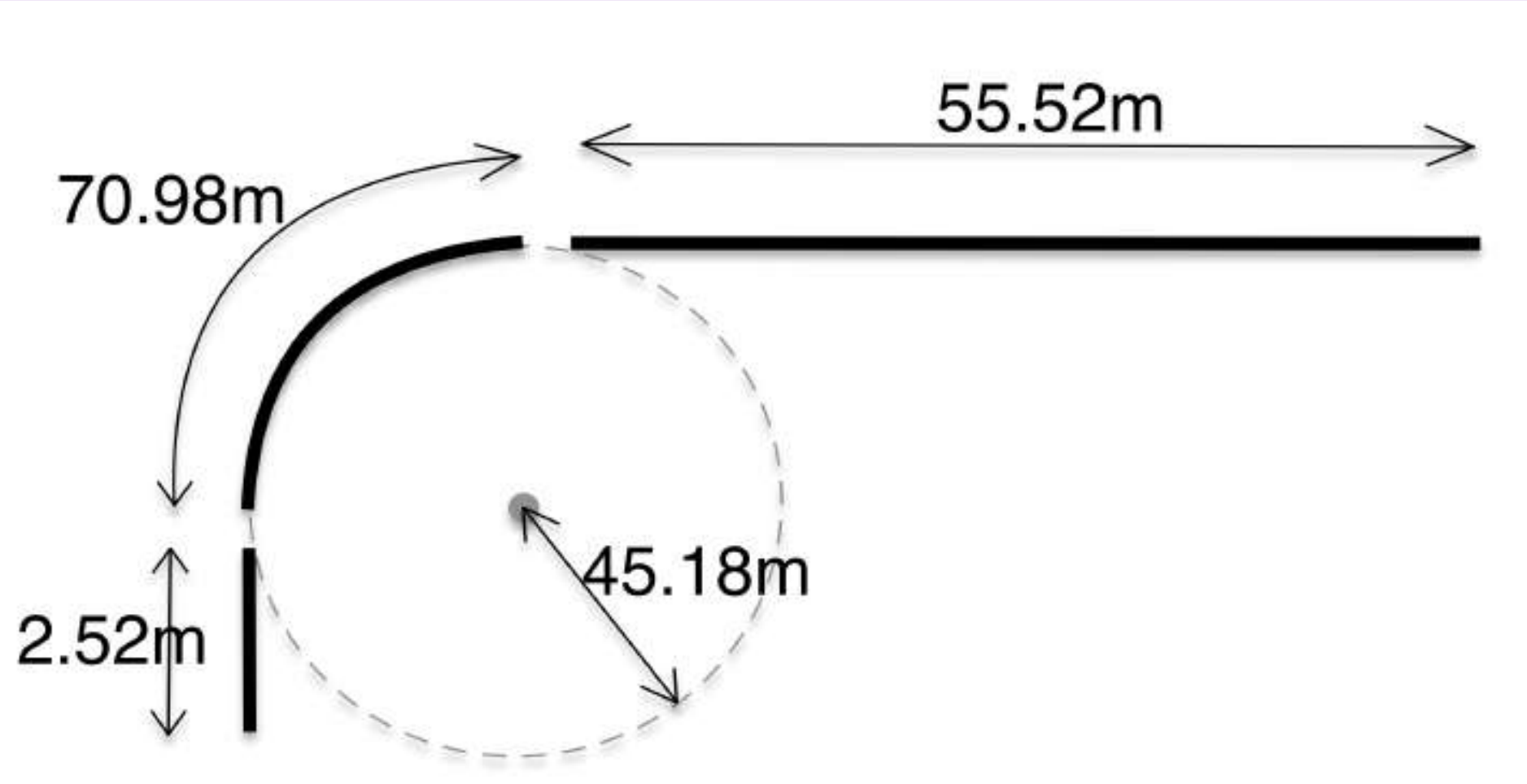
$$\boxed{\min \max \frac{1}{R}}$$



A la recherche du stade optimal

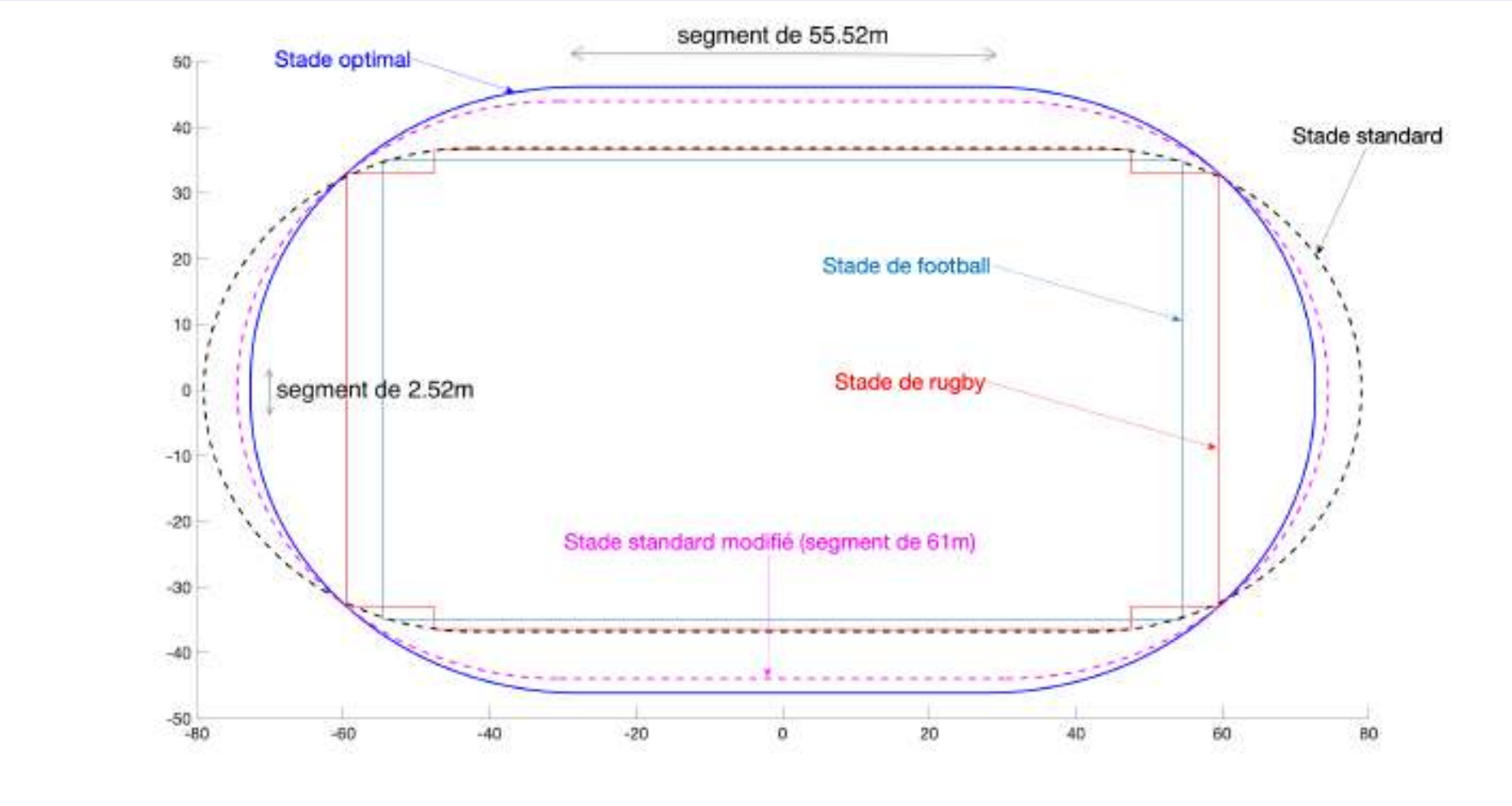
Problème contraint : trouver une courbe plane, fermée, contenant les stades de football et de rugby, et minimisant le maximum de courbure :

$$\boxed{\min \max \frac{1}{R}}$$



A la recherche du stade optimal

Variante : imposer une ligne droite de longueur 61m. On obtient alors un stade standard modifié (contenant football et rugby) :



Performances d'un coureur sur ces pistes

Pour tester les performances d'un coureur sur ces différentes pistes, on utilise un modèle de coureur :

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= v(t) & x(0) &= 0, \quad x(t_f) = d \\
\dot{v}(t) &= -\frac{v(t)}{\tau} + f(t) & v(0) &= v_0 \\
\dot{f}(t) &= \gamma\Big(u(t)(F_{\max} - f(t)) - f(t)\Big) & f(t) &\geqslant 0 \\
\dot{e}(t) &= \sigma(e(t)) - f(t)v(t) & e(0) &= e^0, \quad e(t) \geqslant 0, \\
& & & \quad e(t_f) = 0
\end{aligned}
$$

$e(t)$: énergie anaérobie $\quad f(t)$: force propulsive $\quad u(t)$: contrôle moteur
$\sigma(e)$: équivalent énergétique de l'absorption d'oxygène VO2

[Keller 1974, Behncke 1994, Mathis 1989, Quinn 2009, Aftalion Bonnans 2014, Pessiglione 2016, Aftalion Martinon 2019]

modèle qu'on complète pour tenir compte des forces centrifuges dans les courbes.

Modèle de coureur (problème de contrôle optimal)

$$\dot{x} = v \qquad x(0) = 0, \qquad x(t_f) = d$$

$$\dot{v} = -\frac{v}{\tau} + f \qquad v(0) = v^0$$

$$\dot{e} = \sigma(e) - fv - \ell(c_{\text{stat}} - \ell w)\left(\frac{v^2}{R_k}\cos\theta - g\sin\theta\right) \qquad e(0) = e^0,\ e(t) \geqslant 0,\ e(t_f) = 0,$$

$$\dot{f} = \gamma\left(u(F_{\max} - f) - f\right), \qquad f(t) \geqslant 0$$

$$\dot{\theta} = w$$

$$\boxed{\min\left(t_f + \int_0^{t_f}\left(\varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2\left(\frac{9}{16}\left(\frac{v^2}{R_k}\cos\theta - g\sin\theta\right)^2 + \ell^2 w^4\right) + \varepsilon_3 \ell^2 w^2\right) dt\right)}$$

où $u(t)$ and $w(t)$ sont les contrôles, et sous la contrainte

$$f^2 + \left(\frac{v^2}{R_k}\sin\theta + g\cos\theta + \ell w^2\right)^2 - g^2 \leqslant f_M^2 \qquad \forall t \in [0, t_f].$$

Les différents paramètres sont identifiés sur des données réelles :

Michael Johnson, Atlanta 1996, stade standard, ligne 5.

Résultats numériques

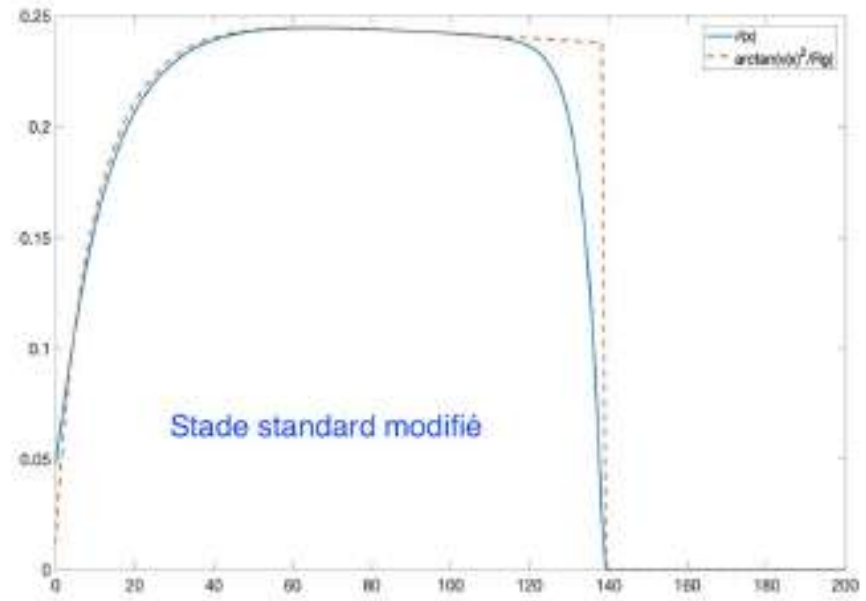
Selon les simulations numériques faites sur notre modèle, **Michael Johnson aurait fait mieux sur le stade optimal !**

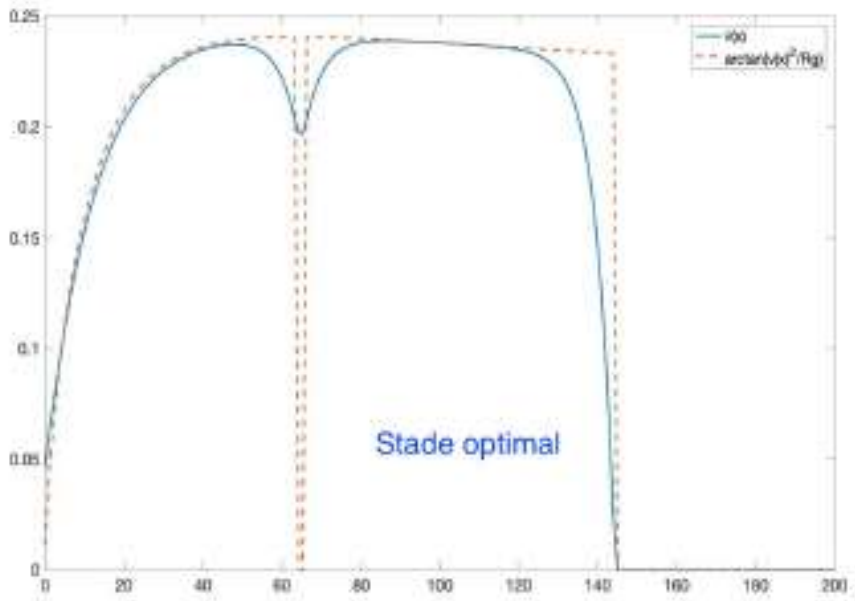
	Ligne 1	Ligne 5
Stade standard	19.37	19.32
Stade optimal	19.30	19.283
Stade standard modifié	19.305	19.285
Stade DB1	19.44	19.40
Stade DB2	19.52	19.484

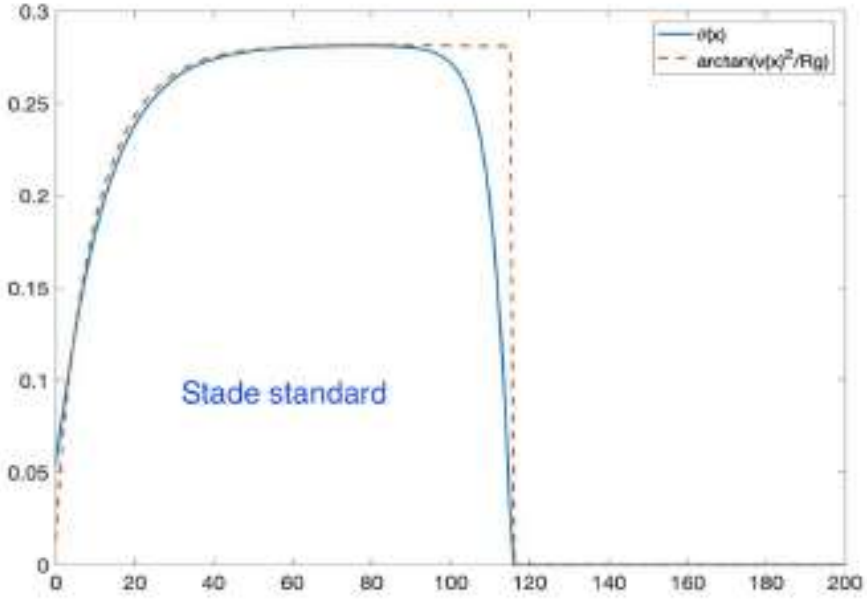
Autre avantage du stade optimal : **la différence entre les lignes est significativement plus petite**.

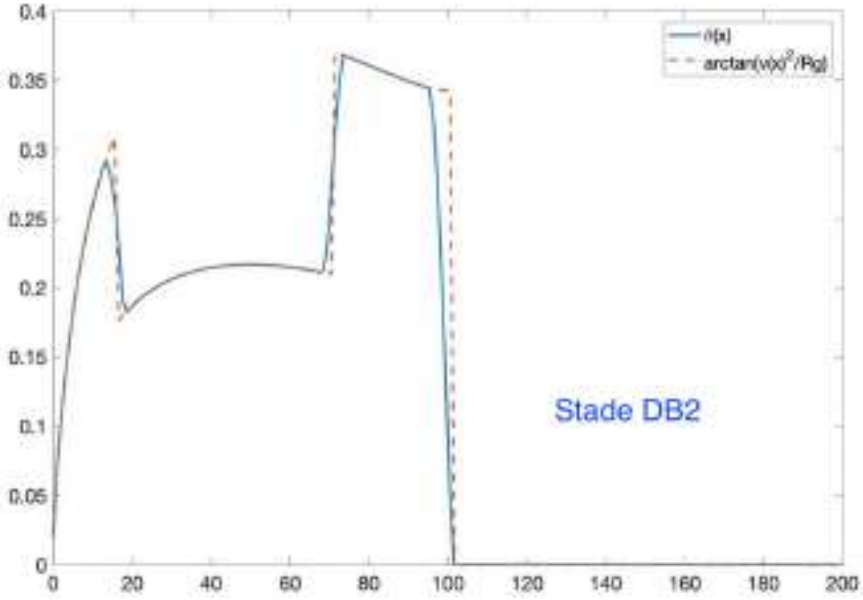
Remarque : Les temps du stade standard modifié sont presque identiques à ceux du stade optimal.

Résultats numériques

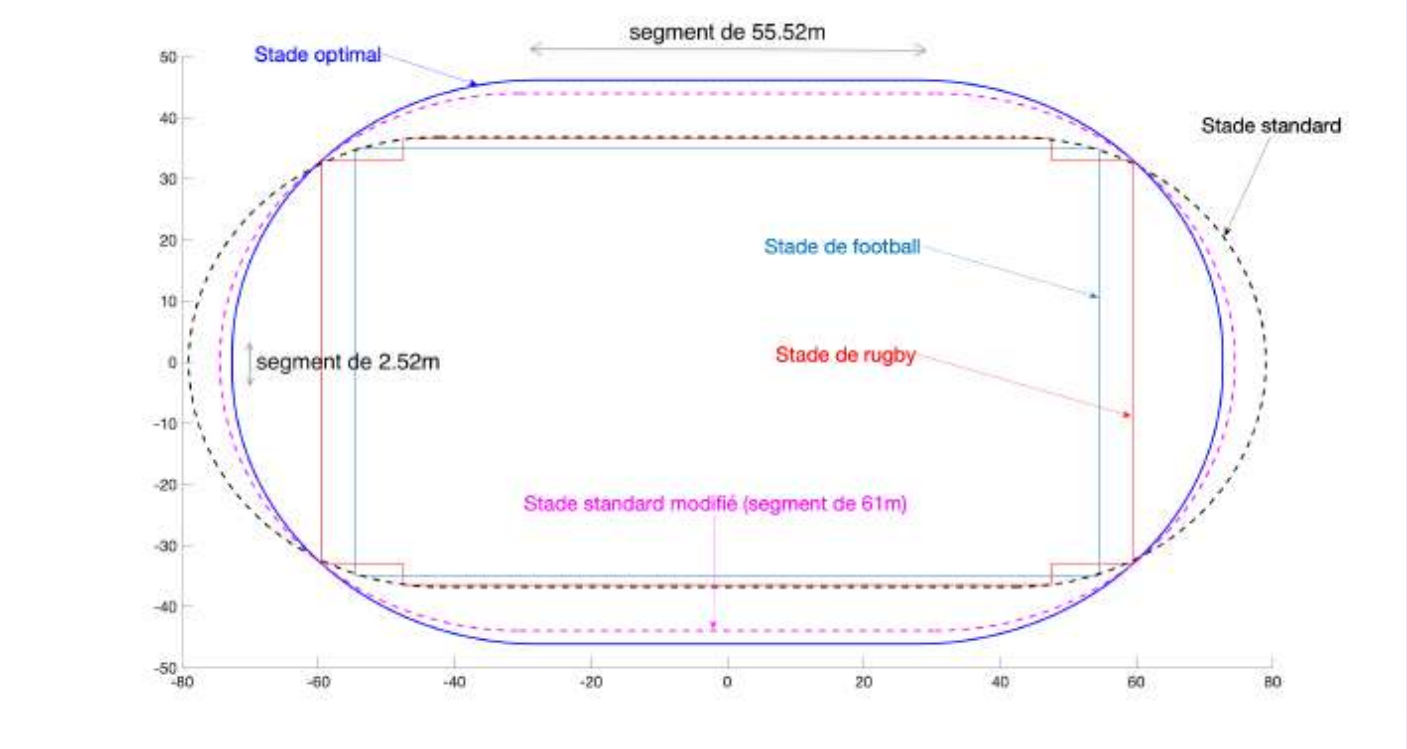








Conclusion



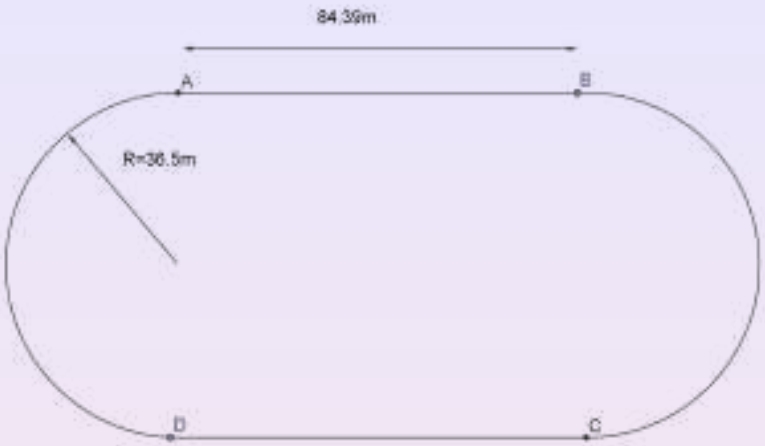
- Modèle de contrôle optimal qui reproduit de manière fiable les performances des champions. (variantes possibles : effet "pom-pom girl", interactions, distance quelconque)

- Selon ce modèle, le stade standard n'est pas optimal (ligne droite trop longue), les stades DB encore moins.
  On propose un nouveau stade ("optimal" ou "standard modifié") qui permet, selon notre modèle, de battre des records.

A. Aftalion, E. Trélat, *How to build a new athletic track to break records*, Preprint Hal (2020).

Stades actuels (certifiés par l'IAAF)

Stade standard :



Avantages

Il est admis dans la communauté que le stade standard est le plus rapide.

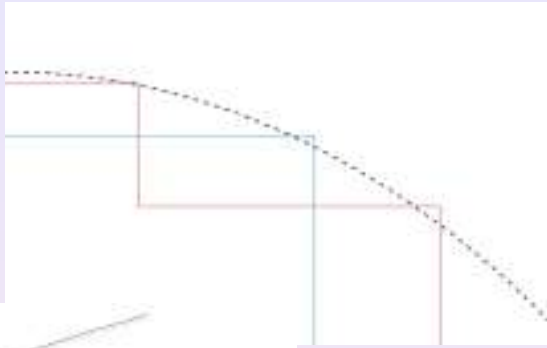
Inconvénients

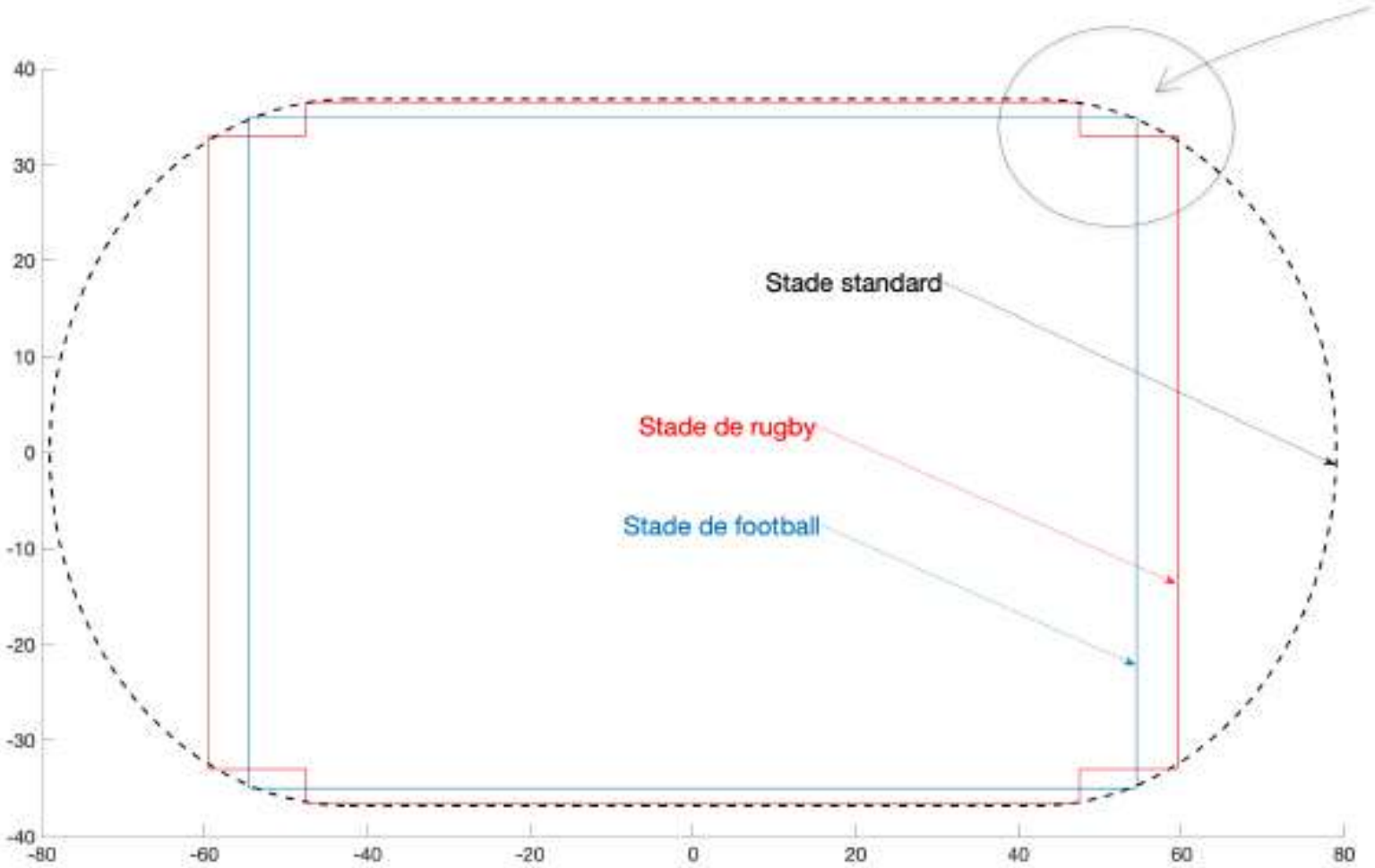
Il ne contient ni un stade de football ni un stade de rugby.

Stades actuels (certifiés par l'IAAF)

Football = rectangle 109×70

Rugby = $\Big($ rectangle 95×73 $\Big)$
$\bigcup \Big($ rectangle 119×66 $\Big)$





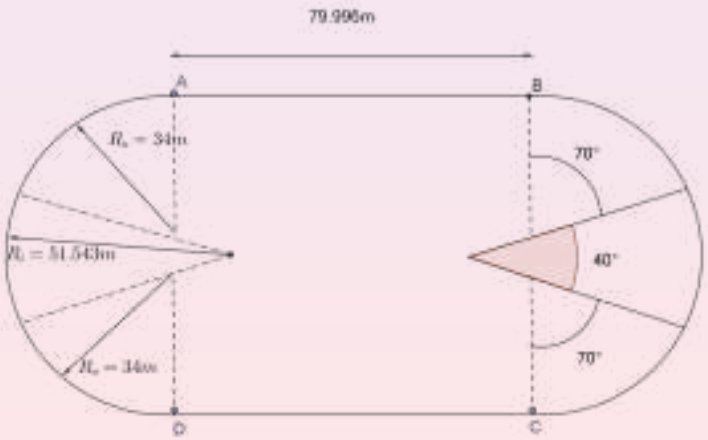
Stades actuels (certifiés par l'IAAF)

Avantages

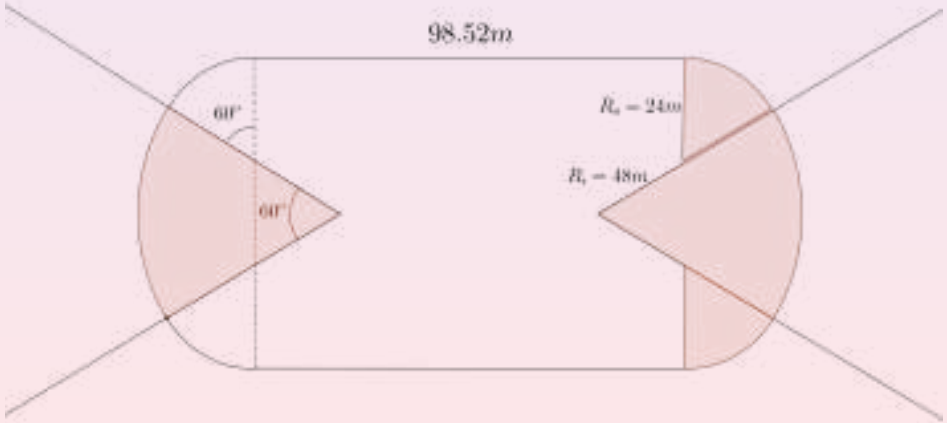
Les stades DB contiennent un stade de football ou de rugby.

Inconvénients

- Moins rapides.
- Plus grande différence entre les lignes.



Double Bend 1



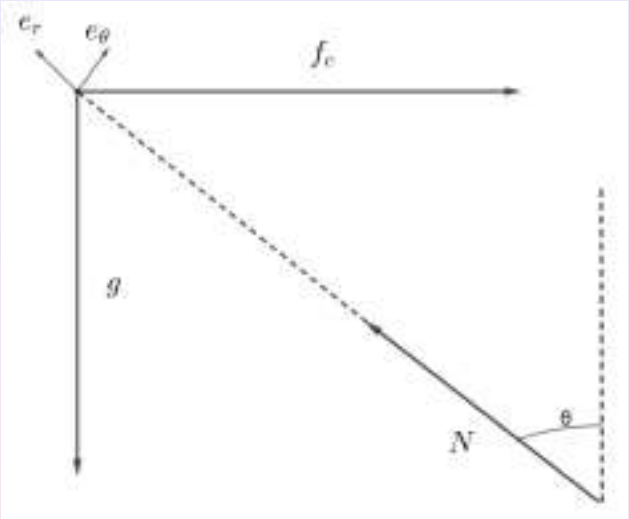
Double Bend 2

Modèle de coureur

Coureur = tige de longueur 2ℓ, angle $\theta(t)$ avec la verticale.

A l'équilibre :

$$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}$$



En mouvement :

$$\frac{4}{3}\ell\ddot{\theta}(t) = \frac{v(t)^2}{R}\cos\theta(t) - g\sin\theta(t)$$

<u>Hypothèse</u> : le coureur tend à vouloir minimiser, le long de sa course,

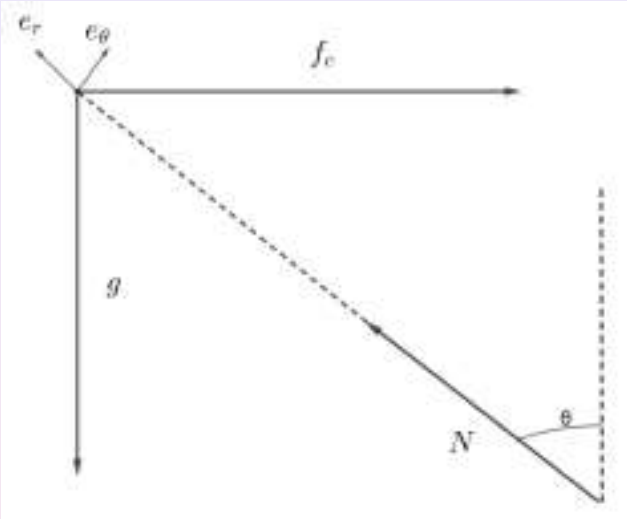
$$\|\ddot{r}(t)\|^2 = \ell^2\ddot{\theta}(t)^2 + \ell^2\dot{\theta}(t)^4 = \frac{9}{16}\left(\frac{v(t)^2}{R\cos\theta(t)} - g\sin\theta(t)\right)^2 + \ell^2\dot{\theta}(t)^4$$

Modèle de coureur

Coureur = tige de longueur 2ℓ, angle $\theta(t)$ avec la verticale.

A l'équilibre :

$$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}$$



En mouvement :

$$\frac{4}{3}\ell\ddot{\theta}(t) = \frac{v(t)^2}{R}\cos\theta(t) - g\sin\theta(t)$$

Egalement, le coureur a une force finie :

$$f(t)^2 + N(t)^2 \leqslant f_M^2 + g^2$$

où

$$\ell\dot{\theta}(t)^2 = N(t) - g\cos\theta(t) - \frac{v(t)^2}{R}\sin\theta(t)$$